**Лек 8.Многомерные оптимальные системы**

            Вначале подытожим основные результаты, полученные при решении задачи синтеза одномерной оптимальной реализуемой системы управления.

            Пусть входное воздействие g(t) представляется реализацией случайного процесса с энергетическим спектром https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image001.gif и в сумме z(t)=g(t)+n(t) с белым шумом (помехой) n(t) поступает на систему управления. В соответствии с методом Винера оптимальная реализуемая система имеет передаточную функцию

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image002.gif,

где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image003.gif ,      x(jw)=WP(jw)Z(jw).

            Р.Калман предложил другое представление того же решения в виде дифференциального уравнения  https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image004.gif.

            При этом входное воздействие g(t) удобно представить в виде выходного сигнала фильтра (рис.38), описываемого дифференциальным уравнением https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image005.gif.

            Фильтр, с помощью которого моделируется входное воздействие g(t), обычно называют **формирующим фильтром**. Само же входное воздействие g(t) при этом является состоянием формирующей системы.

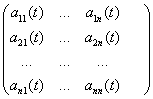
            Было установлено, что при описании входных сигналов в виде состояния некоторой системы всегда получается решение в виде точно такой же по виду системы с обратной связью. При этом  структура САУ сохраняется для любого интервала времени, в том числе и во время переходного процесса, при изменении коэффициентов https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image006.gif во времени, а также в случае, когда x(t) является вектором, т.е. при одновременном управлении по нескольким параметрам. И во всех этих случаях структура системы управления оказывается оптимальной в смысле минимума дисперсии ошибки  https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image007.gif.

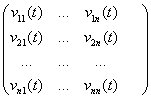
В этом разделе вначале рассматриваются математические модели входных многомерных нестационарных воздействий. После этого обсуждается структура оптимальной многомерной системы, которая называется фильтром Калмана.

**Описание входных воздействий**

            Пусть нам необходимо осуществлять управление одновременно n выходными сигналами системы https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image008.gif При этом мы хотим получить наименьшие отличия этих сигналов от заданных функций – входных воздействий . Будем описывать входные воздействия с помощью системы линейных дифференциальных уравнений состояния:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image010.gif,

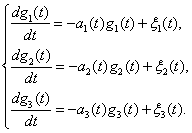
где A(t) – (n https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image011.gif n) – матрица:;  – векторный белый шум с энергетическим спектром каждой компоненты https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image014.gif соответственно.

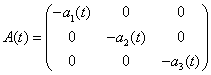
            V(t) - (n https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image011.gif m)-матрица V(t)=.

            Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Уравнение состояния для трех независимых параметров.

            Предположим, что необходимо обеспечить измерение траектории по 3 координатам, не связанным друг с другом. Эти координаты описываются случайными процессами, соответствующими дифференциальным уравнениям:



            Введем вектор , матрицу  и белый шум  . Тогда одновекторное уравнение состояния https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image020.gif в точности описывает все заданные входные воздействия Для проверки достаточно раскрыть в этом уравнении матричные и векторные обозначения.

**Пример 2.** Входное воздействие с дробно-рациональным энергетическим спектром.

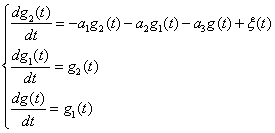
            Пусть  g(t) описывается дифференциальным уравнением вида:

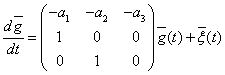
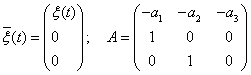
https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image021.gif.

            Найдем энергетический спектр такого воздействия. Для этого вначале выполним преобразование Лапласа https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image022.gif    и запишем передаточную функцию формирующего фильтра

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image023.gif.

Энергетический спектр входного воздействия находится по формуле  https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image024.gif.    При выборе различных коэффициентов https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image025.gif могут быть получены энергетические спектры разнообразной формы. Но рассматриваемое уравнение имеет третий порядок. Преобразуем его в одно векторное уравнение. Введем вспомогательные переменные:https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image026.gif.  Тогда исходное уравнение перепишется в форме:

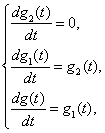
.

            Введем теперь вектор  и  тогда , где . Таким образом дифференциальное уравнение третьего порядка удается преобразовать к стандартной векторной форме. Очевидно, что точно так же к векторному уравнению первого порядка можно преобразовать дифференциальное уравнение произвольного порядка.

**Пример 3.** Полиномиальное воздействие.

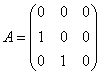
            Пусть https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image031.gif. Такой входной сигнал получается как решение следующего дифференциального уравнения  https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image032.gif. Заметим, что этот результат можно рассматривать как частный случай предыдущего примера, полагая  https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image033.gif. Тогда https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image032.gif, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image034.gif – начальные условия.

            Введем вспомогательные переменные https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image026.gif. Тогда уравнения состояния запишутся в виде:



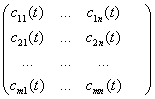
 или в стандартной форме:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image036.gif,

где ,  .

            Таким образом, исходное дифференциальное уравнение состояния https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image039.gif описывает широкий класс реальных случайных процессов.

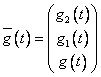
            Пусть теперь https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image040.gif передается по каналу связи и вместе с помехой поступает на вход системы управления:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image041.gif, где , C(t)=;

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image044.gif=https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image045.gif– помеха в виде векторного белого шума со спектральными плотностями каждой компоненты https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image046.gif соответственно.

            Рассмотренная векторная модель позволяет дать математическое описание различных ситуаций, возникающих при формировании входных сигналов проектируемых САУ.

**Пример 4.** Предположим, что один и тот же входной сигнал g(t) передается по двум независимым каналам связи. При этом на выходе первого канала наблюдается смесь https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image047.gif сигнала https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image048.gif с помехой https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image049.gif, а на выходе второго канала наблюдается процесс https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image050.gif. Для того, чтобы представить такие наблюдения в стандартной векторной форме, введем векторы https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image051.gif и матрицу https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image052.gif. В этом случае одно векторное уравнение https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image053.gif или https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image054.gif описывает двухканальную систему наблюдений скалярного процесса https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image048.gif.

**Пример 5.** Пусть входной сигнал https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image048.gif имеет сложный энергетический спектр и описывается дифференциальным уравнением третьего порядка (см. пример 2). В этом случае уравнение состояния включает трехмерный вектор . Производятся наблюдения сигнала https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image048.gif на фоне помехи https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image056.gif https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image057.gif. Для того, чтобы получить стандартное представление наблюдений https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image058.gif необходимо ввести матрицу https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image059.gif.

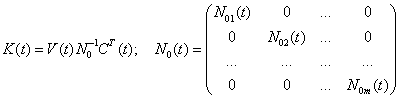
**Многомерный фильтр Калмана**

            Наблюдаемый многомерный сигнал https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image060.gif поступает на систему управления. В наилучшей системе обеспечивается минимум суммарной ошибки:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image061.gif.

            Структура оптимальной системы описывается следующим уравнением:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image062.gif,

где ,

а  https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image064.gif. Последнее уравнение является дифференциальным уравнением Риккати и обычно требует ЭВМ для решения. Но это решение находится, как правило, один раз до проведения эксперимента. После этого значения V(t) могут храниться в памяти. Уравнение для матрицы V(t) называется **дисперсионным**, поскольку V(t) – точная матрица дисперсий и взаимных ковариаций ошибок управления.

            Итак, и в многомерном нестационарном случае система управления сохраняет свою структуру (рис. 39). По-прежнему это система, в которой формируется сигнал ошибки https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image065.gif. Он поступает на фильтр, включающий переменный коэффициент усиления K(t) и интеграторы, охваченные обратной связью.

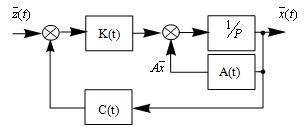


Рис. 39

 При этом часть системы в точности соответствует формирующему  фильтру.

**Пример 6.**Еще раз рассмотрим систему управления при входном сигнале, заданном уравнением:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image067.gif, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image068.gif,

где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image069.gif.

            В этом случае уравнение Калмана для наблюдений z(t)=g(t)+n(t) запишется в виде:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image070.gif,

где K(t)=V(t)https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image071.gif;

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image072.gif.

            Существенной особенностью записанного уравнения фильтрации является зависимость коэффициента усиления K(t)  от времени. Это связано с тем, что фильтр Калмана учитывает переходный процесс в системе и оптимален для каждого момента времени t. Характерную зависимость V(t) можно проиллюстрировать графиком на рис. 40.

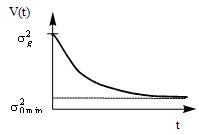


Рис. 40

В начальный момент времени (t=0) рассогласование между выходным сигналом x(t=0)=0 системы управления и заданной траекторией движения g(t=0)=g(0) может быть большим. Поэтому  и коэффициент усиления К(t=0)=https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image074.gif   в этот момент наибольший. По мере уменьшения динамической ошибки в процессе работы системы коэффициент усиления уменьшается  и стремится к оптимальному для установившегося режима значению https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image075.gif. Это значение можно найти, полагая https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image076.gif=0  в установившемся режиме. Тогда из уравнения Риккати получаем: https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image077.gif, где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image078.gif или https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image079.gif. Решение этого уравнения https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image080.gif совпадает с известной величиной дисперсии ошибки стационарного реализуемого фильтра Винера.

            Итак, для одномерного случая отличием приведенного решения является учет переходного процесса и выбор оптимальных параметров системы управления в каждый момент времени.

            Оптимальное управление предполагает точное знание моделей входных воздействий и характеристик помех. Однако на практике численные значения параметров моделей известны не точно. Кроме того, вычислительные трудности ограничивают применение сложных моделей высокой размерности, предопределяя применение более грубых и более простых приближений к реальным процессам.

            Указанные причины приводят к отклонению действительных характеристик эффективности от расчетных. Величина отклонений действительных характеристик систем управления от потенциальных за счет изменения параметров внешних воздействий называется**чувствительностью системы управления**.

            Предположим, что Q – некоторый показатель качества, например, средний квадрат ошибки системы, зависящий от некоторого параметра https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image081.gif входного сигнала. При отклонении https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image081.gif от заданного значения https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image081.gif0 показатель качества Q также отклоняется от оптимального значения Q0. В этом случае чувствительность можно характеризовать отношением:https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image082.gif а при малых отклонениях – величиной https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image083.gif Чем выше чувствительность, тем больше опасений, что в реальных условиях система управления будет иметь худшие характеристики качества по сравнению с расчетными. Если, наоборот, величина https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image084.gif мала, то допустимы значительные отклонения параметров внешних воздействий. В предельном случае, когда https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image084.gif=0, показатель качества системы вообще не зависит от параметра https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image081.gif. В таком случае говорят, что **система управления инвариантна** относительно параметра https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_33.files/image085.gif.

            В этом разделе рассмотрены два подхода к построению оптимальных систем управления. Первый подход связан с именем Н. Винера и основан на нахождении структуры оптимальной системы с помощью решения интегрального уравнения. Главные недостатки этого метода – сложность решения задач синтеза САУ и требования к стационарности входных воздействий. Поэтому при проектировании современных нестационарных систем управления применяется метод пространства состояний, предложенный Р. Калманом. Этот метод позволяет на инженерном уровне решать сложные задачи построения оптимальных многомерных систем с учетом переходных процессов в условиях нестационарных помех и нестационарных воздействий.